olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte $b \to B^-$ iken ($B = +\infty$ için $B^- = +\infty$) limite geçilirse,

$$\int_a^{B^-} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a) \tag{7.23}$$

olduğu elde edilir.

Benzer olarak, eğer $F(x)$, $(A, b](b \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}$ veya $\mathrm{A} = -\infty)$ aralığında $f : (A, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun herhangi bir ilkel fonksiyonu ise f nin $[A, b]$ aralığı üzerindeki has olmayan integrali için

$$\int_{A+}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a) \tag{7.24}$$

olduğu elde edilir.

Not: (7.23) ve (7.24) formüllerine has olmayan integraller için Newton-Leibnitz formülleri de denir. •

Not: Parametreye bağlı has olmayan integrallerin ve katlı has olmayan integrallerin incelenmesine ilerideki bölümlerde devam edilecektir. •

7.4 Çözümlü Problemler

(1) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(a > 0)$; (b) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ $(a > 0)$;

(c) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$; (d) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$;

(e) $\int\limits_{-\infty}^{0}$ sechxdx ; (f) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(g) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}dx$; (h) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}dx$;

(i) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$; (j) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$;

(k) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}$; (l) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x dx$ $(\alpha > 0)$;

(m) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$; (n) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$;

(o) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx$; (p) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\mathrm{arccot}x}{(1+x^2)^2}dx$;

(r) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}dx$; (s) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+2x^4}}$;

Çözüm: (a) $F(x) = -\frac{1}{x}$, $[a,+\infty)$ $(a > 0)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{b}) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

olur.

(b) $F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$, $[0,+\infty)$ aralığında sürekli e^{-ax} fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{a}e^{-ab}) + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

olur.

(c) $F(x) = -\frac{1+\ln x}{x}$, $[1,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{\ln x}{x^2}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1+\ln b}{b}) + 1 = 1$$

olur.

(d) $F(x) = -\frac{1}{\ln x}$, $[e,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x(\ln x)^2}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{\ln b}) + 1 = 1$$

olur.

(e) $F(x) = 2\arctan(e^x)$, $(-\infty, 0]$ aralığında sürekli sechx fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.24) formülü gereğince

$$\int_{-\infty}^{0} \text{sechxdx} = 2\arctan 1 - \lim_{a\to-\infty}(2\arctan(e^a)) = 2.\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

olur.

(f) $F(x) = \arcsin\frac{1}{x}$, $(-\infty, -2]$ aralığında sürekli $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.24) formülü gereğince

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arcsin(-\frac{1}{2}) - \lim_{a\to-\infty}(\arcsin\frac{1}{a}) = -\frac{\pi}{6}$$

olur.

(g) $F(x) = \cos\frac{1}{x}$, $[\frac{2}{\pi}, +\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}(cos\frac{1}{b}) - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$$

olur.

(h) $F(x) = -3(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2)e^{-\sqrt[3]{x}}$, $[0, +\infty)$ aralığında sürekli $e^{-\sqrt[3]{x}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (az sonra bunu göstereceğiz)(7.23) formülü gereğince

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}dx &= -3\lim_{b\to+\infty}(\sqrt[3]{b^2} + 2\sqrt[3]{b} + 2)e^{-\sqrt[3]{b}} + 3(0 + 2.0 + 2)e^0 \\ &= 3.2 = 6\end{aligned}$$

olur.

$F(x)$ in $[0, +\infty)$ aralığında $e^{-\sqrt[3]{x}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$\int e^{-\sqrt[3]{x}}dx$ $[x = t^3$ denirse $dx = 3t^2dt$ olacağından$]$
$= 3\int e^{-t}t^2dt$ $[u = t^2$ ve $dv = e^{-t}dt$ denirse, $du = 2tdt$ ve $v = -e^{-t}$ olacağından kısmi integrasyon formülüne göre$]$
$= -3t^2e^{-t}+6\int e^{-t}tdt$ $[u = t$ ve $dv = e^{-t}dt$ denirse, $du = dt$ ve $v = -e^{-t}$ olacağından kısmi integrasyon formülüne göre$]$

$$\begin{aligned} &= -3t^2e^{-t} + 6(-te^{-t} + \int e^{-t}dt) \\ &= -3(t^2 + 2t + 2)e^{-t} = -3(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2)e^{-\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

olduğu anlaşılır.
(i) $F(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}$, $[2, +\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x^2+x-2}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\ln\frac{b-1}{b+2} - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4} = \frac{2}{3}\ln 2$$

olur.
(j) $F(x) = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{x})$, $[2, +\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} &= \lim_{b\to+\infty} \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}) - \arcsin 0 \\ &= \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

olur.
(k) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}\ln\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{6x^2+10}+\sqrt{7}}$, $[0, +\infty)$ aralığında sürekli $\frac{x}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü

gereğince

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{14}} \ln \frac{\sqrt{2b^2+1}}{\sqrt{6b^2+10}+\sqrt{7}}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{14}} \ln \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \ln \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\ln(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{\sqrt{14}}$$
$$= \frac{\ln(\sqrt{10}+\sqrt{7}-\sqrt{3})}{\sqrt{14}}$$

olur.

(l) $F(x) = -\frac{\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha x}$, $[0,+\infty)$ aralığında sürekli $e^{-\alpha x}\sin\beta x$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğuna göre, (7.23) formülü gereğince,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{\alpha\sin\beta b+\beta\cos\beta b}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha b} + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$
$$= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

olur.

Benzer olarak, ($\alpha > 0$ için)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

dir.

(m) $F(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$, $[1,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{1+b^2}}{2b^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+b^2}}{b}\right)$$
$$- \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

bulunur.
(n) $F(x) = 2\arctan x - \frac{1}{x}\ln(1+x^2)$, $[1,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)dx}{x^2} &= \lim_{b\to+\infty}(2\arctan(x) - \frac{1}{x}\ln(1+x^2)) \\ &- (2\arctan 1 - \ln 2) = 2.\frac{\pi}{2} - (2.\frac{\pi}{4} - \ln 2) \\ &= \frac{\pi}{2} + \ln 2\end{aligned}$$

olur.
(o) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3} = 0$ limit değerini $f(x) = \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}$ integrant fınksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri olarak kabul edersek

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3} & , x \in (0,+\infty) \text{ ise}, \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığında sürekli olacaktır. Bu fonksiyonun $(0,+\infty)$ aralığında ilkel fonksiyonunu bulalım.
$u = \ln x$ ve $dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^3} = \frac{d(1+x^2)}{2(1+x^2)^3}$ denirse, $du = \frac{dx}{x}$ ve $v = -\frac{1}{4(1+x^2)^2}$ olacağından kısmi integrasyon formülüne göre

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$$

olur. Öte yandan her $x > 0$ için doğru olan

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

eşitliğinden yararlanırsak

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{x(1+x^2)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} - \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \\ &= \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)}\end{aligned}$$

olduğu dolayısıyla, $(0,+\infty)$ aralığında aranan ilkel fonksiyonun

$$F(x)=-\frac{\ln x}{4(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{8}\ln(1+x^2)+\frac{1}{8(1+x^2)}$$

olduğu anlaşılır.

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\frac{1}{8}=F(0)$ kabul edersek (7.23)den dolayı

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}dx=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(0)=0-\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}$$

olduğu elde edilir.

(p) $F(x)=\frac{(x^2-1)\mathrm{arccot}x-x}{4(x^2+1)}$, $[1,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{x\mathrm{arccotx}}{(1+x^2)^2}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\begin{aligned}\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{arccot}x}{(1+x^2)^2}dx &= \lim_{b\to+\infty}F(b)-F(1)\\ &= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}(\frac{b^2-1}{b^2+1}\mathrm{arccot}b-\frac{x}{x^2+1})-\frac{1}{8}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

bulunur.

(q) $\forall x\in[0,+\infty)$ için

$$\frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2+1}+\frac{11}{(x^2+1)^2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}F(x) &= \int\frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{11}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{13}{2}\arctan x+\frac{11}{2}\frac{x}{x^2+1}\end{aligned}$$

fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olur. (7.23) den

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}dx=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(0)=\frac{13}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{13\pi}{4}$$

olur.

(r) $F(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+2x^4}+x}{\sqrt[4]{1+2x^4}-x}-\frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}$, $[0,+\infty)$ aralığında sürekli $\frac{1}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+2x^4}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan (7.23) formülü gereğince

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+2x^4}} &= \lim_{b\to+\infty}F(b)-F(0)\\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}(\ln\frac{\sqrt[4]{1+2b^4}+b}{\sqrt[4]{1+2b^4}-b}-2\arctan\frac{\sqrt[4]{1+2b^4}}{b})\\
&- (\frac{1}{4}\ln 1-\frac{1}{2}\frac{\pi}{2})\\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}(\ln\frac{\sqrt[4]{2+\frac{1}{b^4}}+1}{\sqrt[4]{2+\frac{1}{b^4}}-1}-2\arctan\sqrt[4]{2+\frac{1}{b^4}})-\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}-\frac{1}{2}\arctan(\sqrt[4]{2})-\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

olur. $\diamond$

(2) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a)	$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;	(b)	$\int_0^1\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$;
(c)	$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;	(d)	$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}}$;
(e)	$\int_1^4\frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$;	(f)	$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
(g)	$\int_0^1\ln x dx$;	(h)	$\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;
(i)	$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$;	(j)	$\int_0^{\pi}\frac{\lvert\cos x\rvert}{\sqrt{\sin x}}dx$;
(k)	$\int_{-1}^{0}e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$;	(l)	$\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$.

Çözüm: (a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ fonksiyonu 0 noktasında sınırsız olduğundan verilen integrali

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

şeklinde yazalım. Tanım 7.1.5 gereğince

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} &= \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{b\to 0^-} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^{b} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{b\to 0^-} (b^{\frac{2}{3}} - 1) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\int_{0}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a\to 0^+} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_{a}^{8} = 6$$

olduğundan

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

bulunur.

(b) Verilen integrali

$$\int_{0}^{1} \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} + 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

şeklinde yazalım. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}, 2\sqrt{x}$ fonksiyonları $(0,1]$ aralığında sırasıyla sürekli $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonlarının ilkel fonksiyonları olduğundan

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \lim_{a\to 0^+} (\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5})\Big|_{a}^{1} = \frac{6}{5} \lim_{a\to 0^+} (1 - \sqrt[6]{a^5}) = \frac{6}{5}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{a\to 0^+} (\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2})\Big|_{a}^{1} = \frac{3}{2} \lim_{a\to 0^+} (1 - \sqrt[3]{a^2}) = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} (2\sqrt{x})\Big|_a^1 = 2\lim_{a\to 0^+}(1-\sqrt{a}) = 2$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{6}{5} + 2\frac{3}{2} + 2 = \frac{31}{5}$$

olduğu elde edilir.

(c) Verilen integrali

$$I = \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}dx + 2\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3I_1 + 2I_2$$

şeklinde yazalım. I_1 has integral olup Newton-Leibnitz formülüne göre

$$I_1 = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\Big|_{-1}^1 = \frac{6}{7}$$

olur.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ fonksiyonu 0 noktasında sınırsız olduğundan, I_2 integralini

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

şeklinde yazalım. (b) de olduğu gibi

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b\to 0^-} (3x^{\frac{1}{3}})\Big|_{-1}^b = 3$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to 0^+} (3x^{\frac{1}{3}})\Big|_a^1 = 3$$

olduğundan, $I_2 = 3 + 3 = 6$ bulunur. Böylece,

$$I = 3I_1 + 2I_2 = 3.\frac{6}{7} + 2.6 = 14\frac{4}{7}$$

bulunur.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sınırsız olduğundan verilen integrali

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|\, x^2 - 1 \,|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

şeklinde yazalım.

$\arcsin x$, $[0, 1)$ aralığında sürekli $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonunun ve $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $(1, 2]$ aralığında sürekli $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{b \to 1^-} (\arcsin x \Big|_0^b) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{a \to 1^+} (\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_a^2) = \ln 3$$

bulunur. Demek ki,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|\, x^2 - 1 \,|}} = \frac{\pi}{2} + \ln 3$$

dir.

(e) $F(x) = -\frac{1}{4}\ln(\frac{4}{x}+\sqrt{\frac{16}{x^2} - 1})$, $[1, 4)$aralığında sürekli $\frac{1}{x\sqrt{16-x^2}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{16 - x^2}} &= \lim_{b \to 4^-} (-\frac{1}{4}\ln(\frac{4}{x} + \sqrt{\frac{16}{x^2} - 1}))\Big|_1^b \\
&= -\frac{1}{4}\lim_{b \to 4^-} \ln(\frac{4}{b} + \sqrt{\frac{16}{b^2} - 1}) + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{15}) \\
&= \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{15})
\end{aligned}$$

bulunur.

(f) $F(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$, $[0, 1)$aralığında sürekli $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{b\to 1^-}(\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\Big|_1^b) = \frac{1}{2}\lim_{b\to 1^-}(\arcsin b)^2\\ &= \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

bulunur.

(g) $F(x) = x\ln x - x$, $[0, 1)$aralığında sürekli $\ln x$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan,

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_a^1 = -1 - \lim_{a\to 0^+}(a\ln a - a) = -1$$

bulunur.

(h) (7.14) Kısmi integrasyon formülünü uygulayalım. $f(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ dersek $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ olacağından (7.14)ten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx &= (2\sqrt{x}\ln x)\Big|_0^1) - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\\ &= -2\lim_{a\to 0^+}\sqrt{a}\ln a - \lim_{a\to 0^+}(2\sqrt{x})\Big|_a^1 = -4\end{aligned}$$

bulunur.

(i) $F(x) = -\arcsin\frac{x+1}{2x}$, $(1, 2]$aralığında sürekli $\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}} &= \lim_{a\to 1^+}(-\arcsin\frac{x+1}{2x})\Big|_a^2\\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}\end{aligned}$$

bulunur.

(j) $f(x) = \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}$ fonksiyonu $x = 0$noktasının sağında ve $x = \pi$ noktasının solunda sınırsız olduğundan verilen integrali

$$I = \int_0^{\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$$

[ikinci integralde $x = \pi - t$ değişken değişimi yapıldığında]

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin x}{\sqrt{\sin x}} = 2 \lim_{a \to 0^+} (\sqrt{\sin x}\Big|_a^{\frac{\pi}{2}}) = 2$$

olduğundan, $I = 2.2 = 4$ olur.

(k) $x = \frac{1}{t}$ denirse, $x = -1$ için $t = -1$, $x = 0$ için $t = -\infty$ ve $dx = -\frac{dt}{t^2}$ olacağından,

$$\int_{-1}^{0} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3} = -\int_{-1}^{-\infty} e^t t^3 \frac{dt}{t^2} = \int_{-\infty}^{-1} te^t dt$$

yazılabilir.

$F(t) = te^t - e^t$, $(-\infty, -1]$ aralığında sürekli te^t fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu olduğundan

$$\int_{-\infty}^{-1} te^t dt = \lim_{a \to -\infty} (te^t - e^t)\Big|_a^{-1} = -2e^{-1}$$

bulunur. Buna göre,

$$\int_{-1}^{0} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3} = -2e^{-1}$$

dir.
(l) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^3}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sınırsız olduğundan verilen integrali

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^{0} e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3} + \int\limits_{0}^{1} e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$$

şeklinde yazalım. (k) ya göre birinci integral yakınsak olup değeri $-2e^{-1}$ dir. İkinci integralin ıraksak olduğunu gösterelim.

$x = \frac{1}{t}$ denirse, $x = 1$ için $t = 1$, $x = 0$ için $t = +\infty$ ve $dx = -\frac{dt}{t^2}$ olacağından,

$$\int\limits_{0}^{1} e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3} = \int\limits_{1}^{+\infty} te^t dt = \lim_{b\to+\infty}(te^t - e^t)\Big|_1^b = +\infty$$

bulunur. Buna göre verilen integral ıraksak olup değeri $+\infty$ dur. ◇

(3) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integrali yakınsak olduğunda $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ eşitliği sağlanır mı?

Çözüm: Genellikle yok. Örneğin,

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)dx$$

Fresnel integralini gözönüne alalım. $x^2 = t$ denirse, $x = 0$ için $t = 0$, $x = +\infty$ için $t = +\infty$ ve $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ olacağından,

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

yazılabilir.

$\lim\limits_{t\to0+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = 0$ olduğundan sağ taraftaki birinci integral Riemann anlamında mevcuttur. $\frac{1}{\sqrt{t}}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ aralığında azalan ve $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} =$

0 olduğundan, $\int\limits_1^b \sin t dt = \cos 1 - \cos b$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ aralığında sınırlı olduğundan Dirichlet Testine göre sağ taraftaki ikinci integral de yakınsaktır. Dolayısıyla, verilen integral yakınsaktır. Fakat, $f(x) = \sin(x^2)$ fonksiyonunun $x \to +\infty$ iken limiti yoktur.

Şimdi, $J = \int\limits_0^{+\infty} x \sin(x^4) dx$ integralini gözönüne alalım. $x^2 = t$ değişken değiştirmesi yapıldığında, yakınsak $J = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ integrali elde edilir. Bununla beraber, $f(x) = x \sin(x^4)$ fonksiyonu $x \to +\infty$ iken sınırsızdır. $\diamond$

(4) f, $(0, 1]$ üzerinde monoton ve $\int\limits_0^1 t^\alpha f(t) dt$ yakınsak olsun. $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\alpha+1} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: f, $(0, 1]$ üzerinde artmayan olsun(f, $(0, 1]$ üzerinde azalmayan olması durumu benzer şekilde incelenebilir). Her $x \in (0, \frac{1}{2})$ için

$$\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} t^\alpha f(t) dt \geq f(x) \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} t^\alpha dt = A_\alpha x^{\alpha+1} f(x)$$

olduğu elde edilir. Burada,

$$A_\alpha = \begin{cases} \frac{1-2^{-1-\alpha}}{1+\alpha}, & \alpha \neq -1 \text{ ise}, \\ \ln 2, & \alpha = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Benzer şekilde her $x \in (0, \frac{1}{2})$ için

$$\int\limits_{x}^{2x} t^\alpha f(t) dt \leq f(x) \int\limits_{x}^{2x} t^\alpha dt = B_\alpha x^{\alpha+1} f(x)$$

olduğu elde edilir. Burada,

$$B_\alpha = \begin{cases} \frac{2^{\alpha+1}-1}{1+\alpha}, & \alpha \neq -1 \text{ ise}, \\ \ln 2, & \alpha = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Böylece, her $x \in (0, \frac{1}{2})$ için

$$\frac{1}{B_\alpha}\int_{x}^{2x} t^\alpha f(t)dt \leq x^{\alpha+1}f(x) \leq \frac{1}{A_\alpha}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^\alpha f(t)dt$$

olduğu anlaşılır.

$\int_0^1 t^\alpha f(t)dt$ yakınsak olduğundan Cauchy Testi gereğince

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^\alpha f(t)dt = \lim_{x\to 0^+}\int_{x}^{2x} t^\alpha f(t)dt = 0$$

olacağından son eşitsizlikten $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha+1}f(x) = 0$ olduğu elde edilir. ⋄

(5) f, $[1, +\infty)$ üzerinde monoton ve $\int_1^{+\infty} t^\alpha f(t)dt$ yakınsak olsun. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = \frac{1}{t}$ denirse, $x = 1$ için $t = 1$, $x = +\infty$ için $t = 0$ ve $dx = d(\frac{1}{t})$ olacağından,

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} f(\frac{1}{t})d(\frac{1}{t})$$

olduğu elde edilir. Buna göre, Problem (4) gereğince

$$\lim_{t\to 0^+}(\frac{1}{t})^{\alpha+1}f(\frac{1}{t}) = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}f(x) = 0$$

olur. ⋄

(6) Aşağıdaki integrallerin karakterini inceleyiniz.

(a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 5x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$; (b) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+\cos x}$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^5-x^2+2}dx$; (d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{1+x^9}}$;

(e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$; (f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

(g) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$; (h) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}dx\ (a>0)$;

(i) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\sin(e^x)dx$; (j) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}\ (p,q\in\mathbb{R})$;

(k) $\int\limits_a^{+\infty} x^pe^{-ax}dx\ (p>0,a>0)$; (l) $\int\limits_0^{+\infty} x^pe^{-ax}\cos xdx\ (a>0,p>0)$;

(m) $\int\limits_a^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx\ (a>0,p>0)$; (n) $\int\limits_a^{+\infty} |\ln x|^p\ \frac{\sin x}{x}dx\ (a>0,p>0)$;

(o) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^p}dx, (a>0,p>0)$; (p) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$;

(r) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{\alpha_1}.|x-a_2|^{\alpha_2}\cdots|x-a_n|^{\alpha_n}}\quad (-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty)$.

Çözüm: (a) $[1,+\infty)$ aralığında

$$0\le\frac{\cos^2 5x}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

eşitsizliği sağlandığına ve $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ integrali yakınsak olduğuna göre ($p=\frac{4}{3}>1$) Karşılaştırma Testi (Bkz. Teorem 7.2.2(a)) gereği verilen integral de yakınsaktır.

(b) $x\to+\infty$ iken $\frac{x}{x^3+\cos x}\sim\frac{1}{x^2}$ ve $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak olduğundan ($p=2>1$) Özel Karşılaştırma Testi (Bkz. Teorem 7.2.6(a)) gereği verilen integral de yakınsaktır.

(c) $x\to+\infty$ iken $\frac{x^3+7}{x^5-x^2+2}\sim\frac{1}{x^2}$ ve $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak olduğundan (b) de olduğu gibi verilen integral yakınsaktır.

(d) Verilen integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{1+x^9}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[5]{1+x^9}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{1+x^9}}dx$$

şeklinde yazalım. Sağ taraftaki birinci integral Riemann anlamında mevcut, ikinci integral ise ıraksak olduğundan (Çünkü, $x \to +\infty$ iken $\frac{x}{\sqrt[5]{1+x^9}} \sim \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ ve $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}}$ integrali ıraksaktır $(p = \frac{4}{5} < 1)$) verilen integral ıraksaktır.

(e) Verilen integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$$

şeklinde yazalım. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$ olduğundan sağ taraftaki birinci integral Riemann anlamında mevcuttur. İkinci integralin ıraksak, dolayısıyla, verilen integralin ıraksak olduğunu gösterelim.

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$$

ve Dirichlet Testine göre $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx = \int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t}dt$ integrali yakınsak olduğundan (Bkz. Örnek 7.2.14(a))

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\int_1^b \frac{dx}{x} - \int_1^b \frac{\cos 2x}{x}dx) = +\infty\end{aligned}$$

olur. Buna göre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ integrali ıraksaktır.

(f) Verilen integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int_0^{1} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

şeklinde yazalım. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = 0$ olduğundan sağ taraftaki birinci integral Riemann anlamında mevcuttur. Herhangi $p > 1$ sayısı için

$$\lim_{x\to+\infty} x^p \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}x^{-(2p+2)} - x^{-(2p+2)}}} = 0$$

ve $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ integrali yakınsak olduğundan Teorem 7.2.7(a)ya göre sağ taraftaki ikinci integral yakınsaktır. Buna göre, verilen integralin yakınsak olduğu anlaşılır.

(g) (f) ye benzer olarak verilen integralin yakınsak olduğu gösterilebilir.

(h) $\forall x \in (0,1]$ için $\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}\right| \le \frac{1}{a\sqrt{x}}$ ve $\forall x \in [1,+\infty)$ için $\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ olduğundan ve $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $(p = \frac{1}{2} < 1)$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$, $(p = \frac{3}{2} > 1)$ integralleri yakınsak olduğundan Teorem 7.2.11 gereğince $\int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}dx$ ve $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}dx$ integrallerinin, dolayısıyla, verilen integralin yakınsak olduğu anlaşılır.

(i) $e^x = t$ denirse, $x = 0$ için $t = 1$, $x = +\infty$ için $t = +\infty$ ve $dx = \frac{dt}{t}$ olacağından

$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin(e^x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \sin t dt$$

yazılır.

L.Hospital kuralına göre,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} = 2 \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 2 \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$$

bulunur. Öte yandan, $\forall t \in [e^2,+\infty)$ için $\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right)' = \frac{(2-\ln t)\ln t}{t^2} < 0$ olduğuna göre $\frac{\ln^2 t}{t}$ fonksiyonu $t \to +\infty$ iken azalan ve limiti de sıfır olan bir fonksiyondur. $F(b) = \int\limits_1^b \sin t dt = \cos 1 - \cos b,\ b \in [1, +\infty)$ fonksiyonu sınırlı olduğundan Dirichlet Testine göre $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \sin t dt$ integrali ve dolayısıyla, verilen integral yakınsaktır.

Benzer olarak, $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$ integralinin de yakınsak olduğu gösterilebilir.

(j) $\ln x = t$ denirse, $x = 1$ için $t = 0$, $x = +\infty$ için $t = +\infty$ ve $dx = e^t dt$ olacağından

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt$$

yazılır. Sağ taraftaki integrali

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt = \int\limits_0^{1} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} dt = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım.

$p \in \mathbb{R}$ ve $q \leq 0$ olduğunda I_1 integrali Riemann anlamında mevcuttur. $p \in \mathbb{R}$ ve $q > 0$ olduğunda ise $t \to 0+$ iken $\frac{e^{(1-p)t}}{t^q} \sim \frac{1}{t^q}$ dır. O halde, Teorem 7.2.7 gereğince I_1 integrali $q < 1$ için yakınsak $q \geq 1$ için ıraksaktır.

Şimdi I_2 integralinin karakterini inceliyelim. $p > 1$ ise $\forall q \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha > 1$ için

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} \frac{e^{(1-p)t}}{t^q} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{\alpha - q}}{e^{(p-1)t}} = 0$$

olduğuna göre Teorem 7.2.7(a) gereğince I_2 integrali yakınsaktır. $p \leq 1$ için I_2 integrali ıraksaktır.

Böylece, I integrali yalnızca $q < 1$ ve $p > 1$ için yakınsaktır.

(k) Her bir $\lambda > 1$ sayısı için

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p e^{-ax}}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{p+\lambda}}{e^{ax}} = 0$$

ve $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$, $(a > 0, \lambda > 1)$ integrali yakınsak olduğuna göre Teorem 7.2.7(a) gereğince verilen integral yakınsaktır.

(l) Verilen integrali

$$\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \cos x dx = \int\limits_0^{a} x^p e^{-ax} \cos x dx + \int\limits_a^{+\infty} x^p e^{-ax} \cos x dx$$

şeklinde yazalım. $x^p e^{-ax} \cos x$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığında sürekli olduğuna göre sağ taraftaki birinci integral Riemann anlamında yakınsaktır.

Her bir $x \in [a, +\infty)$ için $| x^p e^{-ax} \cos x | \leq x^p e^{-ax}$ ve (k) ya göre $\int\limits_a^{+\infty} x^p e^{-ax} dx$ integrali yakınsak olduğundan Teorem 7.2.7(a) gereğince $\int\limits_a^{+\infty} x^p e^{-ax} \cos x dx$ integrali ve dolayısıyla, verilen integral yakınsaktır.

Benzer olarak, $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \sin dx$ integralinin de yakınsak olduğu gösterilebilir.

(m) $g(x) = \frac{1}{x^p}$ ve $f(x) = e^{\sin x} \sin 2x$ olsun. $g(x)$, $[a, +\infty)$ aralığında azalan ve $x \to +\infty$ iken limiti sıfır olan bir fonksiyon olduğu açıktır. Her bir $b > a$ için

$$| F(b) | = \left| \int\limits_a^b f(x) dx \right| = 2 \left| \int\limits_0^{\sin b} t e^t dt \right| < 2e$$

olduğundan, Dirichlet Testine göre verilen integral yakınsaktır.

(n) $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = | \ln x |^p \frac{1}{x}$ olsun. Yeteri kadar büyük x ler için (yani $x > e^p$ için)

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2} (p - \ln x) < 0$$

olduğundan, $g(x)$ azalan ve $x \to +\infty$ iken limiti sıfır olan fonksiyondur.Her bir $b > a$ için

$$| F(b) | = \left| \int\limits_a^b f(x) dx \right| = \left| \cos a - \cos b \right| < 2$$

olduğundan, Dirichlet Testine göre verilen integral yakınsaktır.

(o) $f(x) = \sin(x + x^2)$ ve $g(x) = \frac{1}{x^p}$ olsun. Her bir $b > a$ için

$$\int_a^b \sin(x + x^2)dx$$

[$t = x + x^2$ denirse, $x = a$ için $t = a + a^2$, $x = b$ için $t = b + b^2$ ve $dx = \frac{dt}{1+2x} = \frac{dt}{\sqrt{1+4t}}$ olacağından]

$$= \int_{a+a^2}^{b+b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + 4t}}dt$$

olur. $\int\limits_{a+a^2}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{1+4t}}dt$ integrali Dirichlet Testine göre yakınsak olduğundan son eşitlikten $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \sin(x+x^2)dx$ limitinin var ve sonlu olduğu anlaşılır. Buna göre, $F(b) = \int\limits_a^b \sin(x+x^2)dx$, $b \to +\infty$ iken sınırlıdır. $g(x)$, $[a, +\infty)$ aralığında azalan ve $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ olduğundan, Dirichlet Testine göre verilen integral yakınsaktır.

(p) $p = q$ ise verilen integralin ıraksak olduğu açıktır. $p < q$ olsun. Verilen integrali

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

olmak üzere

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q} = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $\frac{1}{x^p+x^q} = \frac{1}{x^p(1+x^{q-p})}$ ve $\lim\limits_{x\to0^+} x^{q-p} = 0$ olduğundan $p > 0$ için $x \to 0^+$ iken $\frac{1}{x^p+x^q} \sim \frac{1}{x^p}$ olduğu açıktır. $p \leq 0$ için I_1 integrali Riemann anlamında mevcuttur. Böylece, Teorem 7.2.6 gereğince I_1 integrali $p < 1$ için yakınsak $p \geq 1$ için de ıraksaktır.

$x \to +\infty$ iken $\frac{1}{x^p+x^q} = \frac{1}{x^q(1+x^{q-p})} = 0(\frac{1}{x^q})$ olduğundan I_2 integrali $q > 1$ için yakınsak, $q \leq 1$ içinde ıraksaktır.

Böylece, $p < q$ olduğu durumda I integrali her $p < 1$ ve her $q > 1$ için yakınsaktır. $p > q$ durumunda benzer olarak, I integrali her $p > 1$ ve her $q < 1$ için yakınsaktır. Her iki durumun birleşmesi sonucunda I integralinin $\min\{p,q\} < 1$ ve $\max\{p,q\} > 1$ için yakınsak olduğu elde edilir.

(q) $f(x) =| x - a_1 |^{-\alpha_1} . | x - a_2 |^{-\alpha_2} \cdots | x - a_n |^{-\alpha_n}$, $c_k \in (a_k, a_{k+1})$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$, $c_0 \in (-\infty, a_1)$ ve $c_n = (a_n, +\infty)$ olsun. $x \to a_k$ iken $f(x) = 0(| x - a_k |^{-\alpha_k})$ olduğundan, $\int\limits_{c_{k-1}}^{a_k} f(x)dx$, $k = 1, 2, \cdots, n$ ve $\int\limits_{a_k}^{c_k} f(x)dx$, $k = 1, 2, \cdots, n$ integralleri $\alpha_k < 1$ için, $| x | \o + \infty$ iken $f(x) = 0(| x |^{-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n})$ olduğundan, $\int\limits_{-\infty}^{c_0} f(x)dx$ ve $\int\limits_{c_n}^{+\infty} f(x)dx$ integralleri $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > 1$ için yakınsaktır. Böylece verilen integral, yalnız ve yalnız $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1, \cdots, \alpha_n < 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > 1$ koşulları sağlandığında yakınsaktır.

Özel olarak $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a|^\alpha}$, $(a \in \mathbb{R})$ integrali α nın hiçbir değerinde yakınsak değildir. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\int\limits_{-\infty}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \text{ ve } \int\limits_{\mathrm{a}}^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^\alpha}$$

integralleride ıraksaktır. $\diamond$

(7) Aşağıdaki integrallerin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $\int\limits_1^8 \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$; (b) $\int\limits_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}dx$;

(c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$; (d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$;

(e) $\int\limits_1^2 \dfrac{(2-x)^\alpha dx}{x^3-3x^2+4}$ $(\alpha > 1)$; (f) $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$;

(g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\dfrac{1}{\cos x})\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; (h) $\int\limits_0^2 \dfrac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$;

(i) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\arccos x}$; (j) $\int\limits_0^\pi \dfrac{1-\cos x}{x^\alpha}dx$;

(k) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$; (l) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$;

(m) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}dx$; (n) $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \dfrac{1}{x}dx$;

(o) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}dx$; (p) $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(q) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{e^2+x^2}-e^{\cos x}}{x^\alpha}dx$; (r) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\cos x}-\sqrt{1+2\cos x}}{\sqrt{\cos^5 x}}dx$.

Çözüm: (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}$ fonksiyonu 0 noktasının sağında sınırsızdır. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integrali yakınsak olduğundan (Bkz. Örnek 7.1.6,$p = \dfrac{1}{3} < 1$) verilen integral yakınsaktır.

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{16+x^4}{16-x^4}}$ fonksiyonu 2 noktasının solunda sınırsızdır. $x \to 2^-$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ ve $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{2-x}}$ integrali yakınsak olduğundan (Bkz. Örnek 7.1.6,$p = \dfrac{1}{2} < 1$) verilen integral yakınsaktır.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$ fonksiyonu 1 noktasının solunda sınırsızdır. $x \to 1^-$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integrali yakınsak olduğundan (Bkz. Örnek 7.1.6,$p = \dfrac{1}{2} < 1$) verilen integral yakınsaktır.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)^\alpha}$ fonksiyonu 1 noktasının solunda sınırsızdır. $x \to 1^-$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{(1-x)^\alpha}$ ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1-x)^\alpha}$ integrali yakınsak olduğundan

$(0 < \alpha < 1)$ verilen integral yakınsaktır.

(e) $f(x) = \dfrac{(2-x)^{\alpha}}{x^3 - 3x^2 + 4} = \dfrac{(2-x)^{\alpha}}{(2-x)^2(x+1)} = \dfrac{1}{(x+1)(2-x)^{2-\alpha}}$ fonksiyonu 2 noktasının solunda sınırsızdır. $x \to 2^-$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{(2-x)^{2-\alpha}}$ ve $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{(2-x)^{2-\alpha}}$ integrali yakınsak olduğundan $(p = 2 - \alpha < 1)$ verilen integral yakınsaktır.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$ fonksiyonu 0 noktasının sağında ve π noktasının solunda sınırsızdır. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ve $x \to \pi^-$ iken $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ olduğu açıktır. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ve $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{\pi - x}}$ integralleri yakınsak olduğundan Teorem 7.2.7 gereğince verilen

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$

integrali yakınsaktır.

(g) $f(x) = \sin(\dfrac{1}{\cos x})\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu 0 noktasının sağında sınırsızdır. Verilen integrali

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ve $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali yakınsak olduğundan I_1 integrali yakınsaktır.

$t = \dfrac{1}{\cos t}$ denirse, $x = \dfrac{\pi}{4}$ için $t = \sqrt{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ için $t = +\infty$ ve $dx = \dfrac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$ olacağından,

$$I_2 = \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2\sqrt{1-t^2}\sqrt{\arccos(\frac{1}{t})}} dt$$

yazılabilir. $t \to +\infty$ iken $g(x) = \dfrac{\sin t}{t^2\sqrt{1-t^2}\sqrt{\arccos(\frac{1}{t})}} = 0(\dfrac{1}{t^3})$ ve $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^3}$ yakınsak olduğundan I_2 integrali de yakınsaktır.

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}$ fonksiyonu 0 noktasının sağında sınırsızdır. $x \to 0^+$ iken $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^{\sin x}-1}.\dfrac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ve $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali yakınsak olduğundan, ($p = \dfrac{1}{2} < 1$) verilen integral yakınsaktır. (Bkz. Teorem 7.2.7).

(i) $\arccos x = t$ denirse, $x = 0$ için $t = \dfrac{\pi}{2}$, $x = 1$ için $t = 0$ ve $dx = -\sin t dt$ olacağından,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$$

olur. $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin t}{t} dt$ integrali Riemann anlamında mevcuttur. Dolayısıyla, verilen integral yakınsaktır.

(j) $\alpha \leq 0$ iken $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^\alpha}$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sürekli olduğundan verilen integral $\alpha \leq 0$ için yakınsaktır. $\alpha > 0$ olsun. $x \to 0^+$ iken $f(x) = \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{2x^{\alpha-2}}$ ve $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{x^{\alpha-2}}$ integrali $\alpha - 2 < 1$ için yakınsak ve $\alpha \geq 1$ için ıraksak olduğundan Teorem 7.2.7 den dolayı verilen integral $0 < \alpha < 3$ için yakınsak, $\alpha \geq 3$ için ıraksak olacaktır. Dolayısıyla, verilen integral $\alpha < 3$ için yakınsaktır.

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^p x \cos^q x}$ olsun. Verilen integrali

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \frac{1}{x^p}$ ve $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{x^p}$ integrali q ne olursa olsun $p < 1$ için yakınsak ve $p \geq 1$ için ıraksaktır. $x \to \frac{\pi}{2}$ iken $f(x) \sim \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^q}$ ve $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\frac{\pi}{2} - x)^q}$ integrali p ne olursa olsun $q < 1$ için yakınsak ve $q \geq 1$ için ıraksaktır. Dolayısıyla, verilen integral $p < 1$ ve $q < 1$ için yakınsaktır.

(l) Herhangi $\frac{1}{2} < p < 1$ sayısı için

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x^p \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2} - p}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cot x}{(\frac{1}{2} - p) x^{-p - \frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{p + \frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2} - p) \tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{p + \frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2} - p) x}
\end{aligned}$$

$[p + \frac{1}{2} > 1$ olduğundan$] = 0$

olur. $\frac{1}{2} < p < 1$ için $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^p}$ yakınsak olduğundan Teorem 7.2.7 den dolayı verilen integral yakınsaktır.

(m) $f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^4}}$ olsun. Verilen integrali

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim x$ ve $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^n dx$ integrali $n > -1$ için yakınsak ve $n \leq -1$ için ıraksak olduğundan Teorem 7.2.7 gereğince I_1 integrali $n > -1$ için yakınsak,$n \leq -1$ için ıraksaktır.

$x \to 1^-$ iken $f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{1 - x}}$ ve $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$ integrali yakınsak olduğundan

I_2 integrali yakınsaktır. Dolayısıyla, verilen integral $n > -1$ için yakınsaktır.

(n) $x = \dfrac{1}{t}$ denirse, $x = 0$ için $t = +\infty$, $x = 1$ için $t = 1$ ve $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$ olacağından,

$$\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+2} \ln^{-q} t}$$

yazılır. Problem 6 (j) den dolayı bu integral $p+2 > 1$ ve $-q < 1$, yani $p > -1$ ve $q > -1$ için yakınsaktır.

(o) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$ fonksiyonu 0 noktasının sağında sınırsızdır. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ integrali yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

(p) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ olduğundan $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sınırlıdır. Herhangi $0 < p < 1$ için $\lim\limits_{x \to 0^+} x^p \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^p}$ yakınsak olduğundan Teorem 7.2.7 den dolayı verilen integral yakınsaktır.

(q) $\alpha \leq 0$ için $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^2 + x^2} - e^{\cos x}}{x^\alpha}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sınırlıdır. $\alpha > 0$ için $x \to 0^+$ iken

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^\alpha}(\sqrt{e^2 + x^2} - e + e - e^{\cos x}) \\ &= \frac{1}{x^\alpha}\Big(\frac{x^2}{\sqrt{e^2 + x^2} + e} + e(1 - e^{\cos x - 1})\Big) \\ &\sim \frac{1}{x^{\alpha - 2}} \end{aligned}$$

ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{\alpha-2}}$ integrali $\alpha < 3$ için yakınsak olduğundan $\alpha < 3$ için verilen integral yakınsaktır.

(r) $\dfrac{\pi}{2} - x = t$ denirse, $x = 0$ için $t = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ için $t = 0$ ve $dx = -dt$

olacağından,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - \sqrt{1+2\cos x}}{\sqrt{\cos^5 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin t} - \sqrt{1+2\sin t}}{\sqrt{\sin^5 t}} dt$$

olur. $t \to 0^+$ iken

$$\frac{e^{\sin t} - \sqrt{1+2\sin t}}{\sqrt{\sin^5 t}} = \frac{e^{2\sin t} - (1+2\sin t)}{[e^{2\sin t} + (1+2\sin t)]\sqrt{\sin^5 t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$$

ve $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}$ yakınsak olduğundan, verilen integral yakınsaktır. $\diamond$

(8) Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p ve q değerlerini bulunuz.

(a) $\int\limits_0^1 x^p(1-x)^q dx$; (b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\, x-1\,|^p |\, x+1\,|^q\, dx$;

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$; (d) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^p x}{\sqrt[3]{x^2}\arctan^q(\frac{1}{x})} dx$;

(e) $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x} dx$; (f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \arctan x}{2+x^q}$, $(p \geq 0)$;

(g) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^p x}{(e^{\frac{1}{x^2}}-1)^q} dx$; (h) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{px} dx}{(\sqrt[3]{x+1}-1)^q \sin^q \frac{x}{x+1}}$.

Çözüm: (a) $f(x) = x^p(1-x)^q$ fonksiyonu $p < 0$ için 0 noktasının sağında, $q < 0$ için 1 noktasının solunda sınırsız olduğundan verilen integrali

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim x^p$ ve $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^p dx$ integrali $p > -1$ için yakınsaktır. Buna göre, q ne olursa olsun $p > -1$ için I_1 integrali yakınsaktır.

Benzer şekilde p ne olursa olsun $q > -1$ için I_2 integrali yakınsak olduğu gösterilir. Böylece verilen integral yalnız ve yalnız $p > -1$ ve $q > -1$ için yakınsaktır.

(b) $f(x) = \mid x - 1 \mid^p \mid x + 1 \mid^q$ olsun. $-\infty,\ -1,\ 1$ ve $+\infty$ noktaları singüler noktalar olabileceğinden verilen integrali

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

şeklinde yazalım. $\mid x \mid \to +\infty$ iken $f(x) \sim \mid x \mid^{p+q}$ ve $\int_{-\infty}^{-2} \mid x \mid^{p+q} dx$, $\int_{2}^{+\infty} \mid x \mid^{p+q} dx$ integralleri $p + q < -1$ için yakınsak olduklarından I_1 ve I_4 integralleri $p + q < -1$ için yakınsaktır.

$x \to -1$ iken $f(x) \sim 2^p \mid x + 1 \mid^q$ ve $\int_{-2}^{0} \mid x + 1 \mid^q dx$ integrali p ne olursa olsun $q > -1$ için yakınsak olduğundan I_2 integrali her $p \in \mathbb{R}$ ve $q > -1$ için yakınsaktır. Benzer olarak her $q \in \mathbb{R}$ ve $p > -1$ için I_3 integralinin yakınsak olduğu gösterilebilir.

Böylece verilen integral $p > -1,\ q > -1$ ve $p+q < -1$ için yakınsaktır.

(c) $f(x) = \dfrac{x^p}{1 + x^q}$, $(q \geq 0)$ olsun. f, $p < 0$ için 0 noktasının sağında sınırsız olduğundan verilen integrali

$$I = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0+$ iken $f(x) \sim x^p$ ve $\int_{0}^{1} x^p dx$ integrali $p > -1$ için yakınsak olduğundan I_1 integrali $p > -1$ için yakınsaktır. $x \to +\infty$ iken $f(x) \sim x^{p-q}$ ve $\int_{1}^{+\infty} x^{p-q}dx$ integrali $p - q < -1$ için yakınsak olduğundan I_2 integrali $p - q < -1$ için yakınsaktır. Dolayısıyla, verilen integral $p > -1,\ q - p > -1$ için yakınsaktır.

(d) $x \to +\infty$ iken $f(x) = \dfrac{\ln^p x}{\sqrt[3]{x^2}\arctan^q(\frac{1}{x})} \sim \dfrac{\ln^p x}{x^{\frac{2}{3}-q}} = g(x)$ olduğundan $I = \int\limits_2^{+\infty} f(x)dx$ ve $I_1 = \int\limits_2^{+\infty} g(x)dx$ integrallerinin karakterleri aynıdır.

$q < -\frac{1}{3}$ olsun. Bu durumda, $\forall p \in \mathbb{R}$ ve $\forall \varepsilon \in (0, -\frac{1}{3} - q)$ için $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x^\varepsilon} = 0$ olduğundan $\forall x \in [b_0, +\infty)$ için $0 < \dfrac{\ln^p x}{x^\varepsilon} < 1$ olacak şekilde $b_0 > 2$ sayısı vardır. Buna göre $\forall x \in [b_0, +\infty)$ için

$$g(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}-q-\varepsilon}} \frac{\ln^p x}{x^\varepsilon} < \frac{1}{x^{\frac{2}{3}-q-\varepsilon}}$$

ve $\int\limits_{b_0}^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\frac{2}{3}-q-\varepsilon}}$ yakınsak olduğundan I_1 integrali yakınsaktır. Dolayısı ile, $\forall p \in \mathbb{R}$ ve $\forall q < -\frac{1}{3}$ için verilen integral yakınsaktır.

$q = -\frac{1}{3}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_2^\infty \frac{1}{x} \ln^p x dx = \int_2^\infty \ln^p x d(\ln x) = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \ln^p x d(\ln x) \\ &= \lim_{b\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{\ln^{p+1} x - \ln^{p+1} 2}{p+1}\Big|_2^b, & p+1 \neq 0 \text{ ise}, \\ \ln(\ln x)\Big|_2^b, & p+1 = 0 \text{ ise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\dfrac{\ln^{p+1} 2}{p+1}, & p < -1, \\ +\infty, & p \geq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

olur. Buradan, I integralinin $q = -\frac{1}{3}$ ve $\forall p < -1$ için yakınsak olduğu anlaşılır.

$q > -\frac{1}{3}$ olduğunda verilen integralin $\forall p \in \mathbb{R}$ için ıraksak olduğu açıktır.

Böylece, verilen integral $\forall p \in \mathbb{R}$, $\forall q < -\frac{1}{3}$ ve $\forall p < -1$, $\forall q = -\frac{1}{3}$ için yakınsaktır.

(e) $+\infty$ ve 0, ($p < 1$ için) singüler noktalar olduğundan verilen integrali

$$I = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $f(x) = x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$ ve $\int\limits_0^1 x^{p-1}dx$ integrali $p > 0$ için yakınsak olduğundan, $p > 0$ için I_1 integrali yakınsaktır. Her $\lambda > 1$ ve her $p \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x\to+\infty} x^\lambda x^{p-1}e^{-x}dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x} = 0$$

ve $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ yakınsak olduğundan I_2 integrali her $p \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. Buna göre, verilen integral $p > 0$ için yakınsaktır.

(f) $+\infty$ ve 0, ($p < -1$ için) singüler noktalar olduğundan $f(x) = \dfrac{x^p \arctan x}{2 + x^q}$ olmak üzere verilen integrali

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{2}x^{p+1}$ ve $\int\limits_0^1 x^{p+1}dx$ integrali $p > -2$ için yakınsak olduğundan, $p > -2$ için I_1 integrali yakınsaktır. $x \to +\infty$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{q-p}}$ ve $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{q-p}}$, $q - p > 1$ için yakınsak olduğundan I_2 integrali her $q - p > 1$ için yakınsaktır.

Böylece, verilen integral $p > -2$ ve $q - p > 1$ olduğunda yakınsaktır.

(g) $x \to +\infty$ için $f(x) = \dfrac{\ln^p x}{(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)^q} \sim \dfrac{\ln^p x}{x^{-2q}}$ olduğundan $I = \int\limits_e^{+\infty} f(x)dx$ ve $I_1 = \int\limits_e^{+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x^{-2q}}dx$ integrallerinin karakterleri aynıdır.

$q < -\dfrac{1}{2}$ olsun. p ne olursa olsun her $0 < \varepsilon < -2q-1$ için $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^p x}{x^\varepsilon} = 0$ olduğundan $\forall x \in [b_0, +\infty)$ için $\dfrac{\ln^p x}{x^\varepsilon} < 1$ olacak şekilde bir $b_0 > e$ sayısı vardır. $\forall p \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [b_0, +\infty)$ için $\dfrac{\ln^p x}{x^{-2q}} = \dfrac{1}{x^{-2q-\varepsilon}} . \dfrac{\ln^p x}{x^\varepsilon} < \dfrac{1}{x^{-2q-\varepsilon}}$ ve $\int\limits_{b_0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{-2q-\varepsilon}}$ integrali yakınsak olduğundan I_1 integrali p ne olursa olsun $q < -\dfrac{1}{2}$ için yakınsaktır.

$q = -\dfrac{1}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_e^\infty \frac{\ln^p}{x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_e^b \ln^p x d(\ln x) \\ &= \lim_{b\to+\infty} \begin{cases} \left.\dfrac{\ln^{p+1} x}{p+1}\right|_e^b, & p \neq -1 \text{ ise,} \\ \ln(\ln x)\Big|_e^b, & p = -1 \text{ ise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty, & p \geq -1 \text{ ise,} \\ -\dfrac{1}{p+1}, & p < -1 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan I integrali $q = -\dfrac{1}{2}$ ve $p < -1$ için yakınsaktır.

Böylece, verilen integral $\forall p \in \mathbb{R}$, $q < -\dfrac{1}{2}$ ve $\forall p < -1$, $\forall q = -\dfrac{1}{2}$ için yakınsaktır.

(h) 0 ve $+\infty$ singüler noktalar olduğundan $f(x) = \dfrac{e^{px}}{(\sqrt[3]{x+1}-1)^q \sin^q \dfrac{x}{x+1}}$ olmak üzere verilen integrali

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım. $x \to 0^+$ iken $\sin \dfrac{x}{x+1} \sim \dfrac{x}{x+1} \sim x$ ve

$$\sqrt[3]{x+1} - 1 = \frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} \sim \frac{x}{3}$$

olduğundan p ne olursa olsun $x \to 0^+$ iken $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2q}}$ ve $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^{2q}}$ integrali $q < \dfrac{1}{2}$ için yakınsak olduğundan $\forall p \in \mathbb{R}$ ve $\forall q < \dfrac{1}{2}$ için I_1 integrali yakınsaktır.

$x \to +\infty$ iken $f(x) \sim \dfrac{e^{px}}{x^{\frac{q}{3}}}$ ve $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{e^{px}}{x^{\frac{q}{3}}}dx$ integrali $p < 0$ için yakınsak olduğundan I_2 integrali $q < \dfrac{1}{2}$, $p < 0$ için yakınsaktır.

Böylece, verilen integral $p < 0$, $q < \dfrac{1}{2}$ için yakınsaktır. $\diamond$

(9) Aşağıdaki integrallerin mutlak ya da koşullu yakınsak olup olmadığını araştırınız.

(a) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}dx$; (b) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$;

(c) $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$; (d) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$;

(e) $\int\limits_1^{+\infty} (1 - e^{\frac{\sin x}{x}})\sqrt{x}dx$; (f) $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{(1+x)^p \sin x}{\ln x}dx$, $(p \leq 0)$;

(g) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x - [\![x]\!] - p}{x}dx$; (h) $\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)dx$ $(q \neq 0)$;

(i) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^p \sin x}{1+x^q}dx$, $(q \geq 0)$.

Çözüm: (a) $p > 1$ olsun. $\forall x \in [1, +\infty)$ için $\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right| \leq \dfrac{1}{x^p}$ ve $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}dx$ yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

$0 < p \leq 1$ olsun. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$ diyelim. $\forall b > 1$ için $F(b) = \int\limits_1^b \sin x dx = \cos 1 - \cos b$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde sınırlı ve $g(x)$, $[1, +\infty)$ üzerinde azalan ($\forall x \in [1, +\infty)$ için $g'(x) = -\dfrac{p}{x^{p+1}} < 0$ olduğundan) ve $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ olduğundan Dirichlet Testine göre verilen integral yakınsaktır. Bu durumda, integralin mutlak yakınsamadığını gösterelim.

Önce, $p \leq 1$ için $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösterelim. $b_0 \in (1, +\infty)$ olsun. $n\pi > b_0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısını bulalım. O halde $b_1 = n\pi$ ve $b_2 = 2n\pi$ sayıları için

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| &= \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \\ &\geq \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{2n\pi} \int\limits_{n\pi}^{2n\pi} \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2n\pi} \frac{n\pi}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

olur. Böylece, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ sayısı verildiğinde $\forall b_0 > 1$ için öyle $b_1 = n\pi > b_0$ ve $b_2 = 2n\pi > b_0$ bulunabilir ki

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx \right| \geq \varepsilon$$

olur. O halde Cauchy Testine göre I_1 integrali $p \leq 1$ için ıraksaktır. Benzer olarak, $p \leq 1$ için $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ integralinin de ıraksak olduğu gösterilebilir.

$\forall x \in [1, +\infty)$ için $\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^p}$ ve $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$ integrali ıraksak olduğundan $\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$ integralide aynı p ler için ıraksaktır. O halde verilen integral $0 < p \leq 1$ için mutlak yakınsak değildir.

$p \leq 0$ olsun. Herhangi bir $b_0 \in (1, +\infty)$ sayısı için $2n\pi > b_0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısını seçelim. $b_1 = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$ ve $b_2 = 2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

noktaları için

$$\Big|\int_{b_1}^{b_2}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\Big| = \int_{2n\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi+\frac{5\pi}{6}}\frac{\sin x}{x^{p}}dx$$

$$\geq \int_{2n\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi+\frac{5\pi}{6}}\sin x dx \geq \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}dx = \frac{\pi}{3}$$

olur. Böylece, $\varepsilon = \dfrac{\pi}{3}$ sayısı verildiğinde $\forall b_0 > 1$ sayısı

$$\Big|\int_{b_1}^{b_2}\frac{\sin x}{x^{p}}dx\Big| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde $b_1 = 2n\pi + \dfrac{\pi}{6} > b_0$ ve $b_2 = 2n\pi + \dfrac{5\pi}{6} > b_0$ sayıları vardır. O halde Cauchy Testine göre verilen integral $p \leq 0$ için ıraksaktır.

Böylece, verilen integral $p > 1$ için mutlak, $0 < p \leq 1$ için koşullu yakınsak olup $p \leq 0$ için ıraksaktır.

(b) $F(b) = \int\limits_0^b \cos x dx = \sin b$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde sınırlı, $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ fonksiyonu yeteri kadar büyük x ler için azalan ($\forall x \in (100, +\infty)$ için $g'(x) = \dfrac{100-x}{2\sqrt{x}(100+x)^2} < 0$) ve $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ olduğundan Dirichlet Testine göre verilen integral yakınsaktır. Bu yakınsamanın koşullu, yani $I = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x} \mid \cos x \mid}{x+100}dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösterelim.

Olmayana ergi yöntemini izleyerek I integralinin yakınsak olduğunu kabul edelim. O halde $I_1 = \int\limits_{100}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x} \mid \cos x \mid}{x+100}dx$ integrali de yakınsak olacaktır. Bu durumda, her $x \in [100, +\infty)$ için

$$\frac{\sqrt{x} \mid \cos x \mid}{x+100} \geq \frac{\cos^2 x}{2\sqrt{x}}$$

olduğundan $\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$ integrali yakınsak olmak zorundadır. Bu ise, $\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^\alpha} dx$ integralinin $\alpha \leq 1$ için ıraksak olması ile çeliştiğinden kabulümüzün yalnış olduğu anlaşılır. Böylece, verilen integral koşullu yakınsaktır.

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{\sin x}{\sqrt{x}})$ fonksiyonunun $x \to +\infty$ iken esas kısmını bulalım.

$t \to 0^+$ iken $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\Big[\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3!}(\frac{\sin x}{\sqrt{x}})^3 + o(\frac{\sin^3 x}{x\sqrt{x}})\Big] \\ &= \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3!}\frac{\sin^3 x}{x^2} + o(\frac{\sin^3 x}{x^2}) \\ &= \frac{\sin x}{x} + R(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, burada $\forall x \in [1, +\infty)$ için $\mid R(x) \mid \leq \frac{1}{3!x^2}$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Buna göre, $\int\limits_{1}^{+\infty} R(x)dx$ integrali mutlak yakınsaktır. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ koşullu yakınsak olduğundan (Bkz. Örnek 7.2.16) verilen integral de koşullu yakınsaktır.

(d) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)dx$ integralinin yakınsak olduğunu Problem (3) te gördük. Bu yakınsamanın koşullu olduğunu görelim. Verilen integrali

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int\limits_{0}^{1} \sin(x^2)dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \sin(x^2)dx = I_1 + I_2$$

şeklide yazalım. $\sqrt{x} = t$ denirse, $x = 1$ için $t = 1$, $x = +\infty$ için $t = +\infty$ ve $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$ olacağından,

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

olduğu elde edilir. I_2 koşullu yakınsak olduğundan (Bkz (a)) verilen integral koşullu yakınsaktır.

(e) $f(x) = \sqrt{x}(1 - e^{\frac{\sin x}{x}})$ fonksiyonunun $x \to +\infty$ iken esas kısmını bulalım.

$t \to 0$ iken $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + o(t^2)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}\Big[1 - 1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin^2 x}{2x^2} - o(\frac{\sin^2 x}{2x^2})\Big] \\ &= -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + R(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir, burada $\forall x \in [1, +\infty)$ için $\mid R(x) \mid \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ ve $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$ integrali yakınsak olduğundan $\int\limits_{1}^{+\infty} R(x)dx$ mutlak yakınsaktır. $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ koşullu yakınsak olduğundan verilen integral de koşullu yakınsaktır.

(f) $\forall x \in [2, +\infty)$ için $c_p = \dfrac{1}{\ln 2}$, $p \leq 0$ ise, $c_p = (\dfrac{3}{2})^p$, $p > 0$ olmak üzere

$$\frac{(1+x)^p \sin x}{\ln x} \leq c_p x^p$$

ve $\int\limits_{2}^{+\infty} x^p dx$ integrali $p < -1$ için yakınsak olduğundan verilen integral aynı p ler için mutlak yakınsaktır.

$-1 \leq p \leq 0$ olsun. $g(x) = \dfrac{(1+x)^p}{\ln x}$ fonksiyonu $[2, +\infty)$ aralığında azalan ($g'(x) = (1+x)^{p-1} \dfrac{px \ln x - 1 - x}{x \ln x} < 0$ olduğu için) ve $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ dır.

$F(b) = \int\limits_2^b \sin x dx = \cos 2 - \cos b$, $[2, +\infty)$ aralığında sınırlı olduğundan verilen integral $-1 \leq p \leq 0$ için yakınsaktır. Bu yakınsamanın koşullu olduğunu görelim. Olmayana ergi yöntemini izleyerek $-1 \leq p \leq 0$ için $\int\limits_2^{+\infty} \frac{(1+x)^p \mid \sin x \mid}{\ln x} dx$ integralinin yakınsak olduğunu varsayalım. O halde, $\forall x \in [2, +\infty)$ için $\frac{(1+x)^p \sin^2 x}{\ln x} \leq \frac{(1+x)^p \mid \sin x \mid}{\ln x}$ olacağından, $I_1 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{(1+x)^p \sin^2 x}{\ln x} dx$ integrali de yakınsak olacaktır. Az önce gördüğümüze benzer olarak $I_2 = \int\limits_2^{+\infty} \frac{(1+x)^p \cos 2x}{\ln x} dx$ integralinin $p < -1$ için mutlak yakınsak ve $-1 \leq p \leq 0$ için yakınsak olduğu gösterilebilir. I_1 ve I_2 integralleri yakınsak olduklarından

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{(1+x)^p}{\ln x} dx = 2I_1 + I_2$$

eşitliğine göre, $\int\limits_2^{+\infty} \frac{(1+x)^p}{\ln x} dx$ integrali $-1 \leq p \leq 0$ için yakınsaktır. Bu ise mümkün olamayacağından varsayımın yalnış olduğu anlaşılır.

Böylece, verilen integral $p < -1$ için mutlak yakınsak ve $-1 \leq p \leq 0$ için koşullu yakınsaktır.

(g) $f(x) = x - [\![x]\!] - p$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$ olsun. $f(x)$ in $[1, +\infty)$ üzerindeki ilkel fonksiyonunu bulalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x \in (n, n+1) \Rightarrow [\![x]\!] = n \Rightarrow f(x) = x - n - p$$

ve

$$x \in (n+1, n+2) \Rightarrow [\![x]\!] = n+1 \Rightarrow f(x) = x - n - p - 1$$

olduğunda $F_n(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - (n+p)x + c_n$, $c_n \in \mathbb{R}$ fonksiyonu f nin $(n, n+1)$ aralığında, $F_{n+1}(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - (n+p)x -$

$x + c_{n+1},\ c_{n+1} \in \mathbb{R}$ fonksiyonu ise f nin $(n+1, n+2)$ aralığında bir ilkel fonksiyonudur. f nin $[1, +\infty)$ aralığında ilkel fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}
& F_n((n+1)^-) = F_{n+1}((n+1)^+) \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & \frac{(n+1)^2}{2} - (n+p)(n+1) + c_n \\
=\ & \frac{(n+1)^2}{2} - (n+p)(n+1) - (n+1) + c_{n+1} \\
\Rightarrow\ & c_{n+1} = c_n + n + 1,\ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $n = 1, 2, \cdots$ alırsak $c_2 = c_1 + 2,\ c_3 = c_2 + 3 = c_1 + 2 + 3, \cdots, c_n = c_1 + 2 + 3 + \cdots + n = c_1 + \dfrac{n^2 + n - 2}{2}$ elde ederiz. $x \in [n, n+1),\ n \in \mathbb{N}$ için $[\![x]\!] = n$ olacağından f nin $[1, +\infty)$ aralığında ilkel fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - ([\![x]\!] + p)x + \frac{[\![x]\!]^2 + [\![x]\!] - 2}{2}$$

olur.

$p = \dfrac{1}{2}$ olsun. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F(n+1) - F(n) = 0$, dolayısı ile $\forall k \in \mathbb{N}$ sayısı için $F(1+k) - F(1) = 0$ olduğu açıktır.

$F(b) = \int\limits_1^b f(x)dx,\ b \in [1, +\infty)$ olsun. $\forall b > 1$ için $k_0 = [\![b - 1]\!]$ olsun. O halde $\forall b > 1$ için

$$\begin{aligned}
\mid F(b) \mid &= \Big| \int_1^b f(x)dx \Big| = \Big| \int_1^{1+k_0} f(x)dx + \int_{1+k_0}^b f(x)dx \Big| \\
&= \Big| \int_{1+k_0}^b f(x)dx \Big| = \Big| \int_{1+k_0}^b (x - [\![x]\!] - \frac{1}{2})dx \Big| = \Big| \int_{1+k_0}^b (x - k_0 - \frac{3}{2})dx \Big| \\
&= \Big| \frac{(x - k_0 - 1)^2}{2} \Big|_{1+k_0}^{b} - \frac{1}{2}(b - k_0 - 1) \Big| \\
&= \frac{1}{2} \Big| (b - k_0 - 1)^2 - (b - k_0 - 1) \Big| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısı ile $F(b) = \int\limits_1^b f(x)dx$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde sınırlıdır. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde azalan ve $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ olduğundan Dirichlet Testine göre verilen integral $p = \dfrac{1}{2}$ için yakınsaktır.

$p \neq \dfrac{1}{2}$ olsun. Bu durumda,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x - [\![x]\!] - p}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x - [\![x]\!] - \frac{1}{2}}{x} dx - (p - \frac{1}{2}) \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

eşitliğindeki 2. integral ıraksak ve az önce gösterildiği gibi 1. integral yakınsak olduğundan verilen integral $p \neq \dfrac{1}{2}$ için ıraksaktır.

$p = \dfrac{1}{2}$ için verilen integralin mutlak yakınsak olmadığını, yani $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\mid x - [\![x]\!] - \frac{1}{2} \mid}{x} dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösterelim. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^{n} \frac{\mid x - [\![x]\!] - \frac{1}{2} \mid}{x} dx &= \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{\mid x - [\![x]\!] - \frac{1}{2} \mid}{x} dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \int\limits_k^{k+1} \mid x - k - \frac{1}{2} \mid dx \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

bulunur. Terimleri $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}$ biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi ıraksak olduğundan son eşitsizliğe göre

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{\mid x - [\![x]\!] - \frac{1}{2} \mid}{x} dx = +\infty$$

olduğu, yani $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\mid x - [\![x]\!] - \dfrac{1}{2} \mid}{x} dx$ integralinin ıraksak olduğu anlaşılır.

Böylece, verilen integral $p = \dfrac{1}{2}$ için koşullu yakınsaktır.

(h) 1) $q > 0$ olsun. $x^q = t$ denirse, $x = 0$ için $t = 0$, $x = +\infty$ için $t = +\infty$ ve $dx = \dfrac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$ olacağından,

$$I = \int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx = \frac{1}{q} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt = \frac{1}{q}(I_1 + I_2)$$

yazılabilir, burada

$$I_1 = \int\limits_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt, \ I_2 = \int\limits_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$$

dır.

$t \to 0^+$ iken $t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \sim t^{\frac{p+1}{q}}$ ve $\int\limits_0^1 t^{\frac{p+1}{q}} dt$ integrali $\dfrac{p+1}{q} > -1$ için yakınsak olduğundan I_1 integrali $\dfrac{p+1}{q} > -1$ için yakınsaktır. ($\forall t \in (0, 1]$ için $t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \geq 0$ olduğundan hem de mutlak yakınsaktır.)

$F(b) = \int\limits_1^b \sin t dt = \cos 1 - \cos b$, $[1, +\infty)$ üzerinde sınırlı ve $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ fonksiyonu $\dfrac{p+1}{q} < 1$ için azalan ve $t \to +\infty$ iken limiti sıfır olan fonksiyon olduğundan Dirichlet Testine göre I_2 integrali $\dfrac{p+1}{q} < 1$ için yakınsaktır.

$\forall t \in [1, +\infty)$ için $\mid t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \mid \sim t^{\frac{p+1}{q}-1}$ ve $\int\limits_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} dt$ integrali $\dfrac{p+1}{q} < 0$ için yakınsak olduğundan I_2 integrali $\dfrac{p+1}{q} < 0$ için mutlak yakınsaktır.

2) $q < 0$ olsun.$x = t^{\frac{1}{q}}$ denirse, $x = 0$ için $t = +\infty$, $x = +\infty$ için $t = 1$

ve $dx = \dfrac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$ olacağından

$$I' = \int\limits_0^1 x^p \sin(x^q) dx = -\frac{1}{q} \int\limits_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt = -\frac{1}{q} I_2$$

$$I'' = \int\limits_1^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx = -\frac{1}{q} \int\limits_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt = -\frac{1}{q} I_1$$

yazabiliriz.

Dirichlet Testine göre I' integrali $\dfrac{p+1}{q} < 1$ için yakınsaktır. $t \to 0+$ iken $t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t \sim t^{\frac{p+1}{q}}$ olduğundan I'' integrali $\dfrac{p+1}{q} > -1$ için yakınsaktır (hem de mutlak yakınsaktır).

Dolayısı ile, verilen integral $-1 < \dfrac{p+1}{q} < 0$ için mutlak, $0 \leq \dfrac{p+1}{q} < 1$ için koşullu yakınsaktır.

(i) Verilen integrali

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx = \int\limits_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx = I_1 + I_2$$

şeklinde yazalım.

$x \to 0+$ iken $\dfrac{x^p \sin x}{1+x^q} \sim x^{p+1}$ ve $\int\limits_0^1 x^{p+1} dx$ integrali $p > -2$ için yakınsak olduğundan I_1 integrali aynı p ler için yakınsaktır (hem de mutlak yakınsaktır.)

Her $x \in [1, +\infty)$ için $\left| \dfrac{x^p \sin x}{1+x^q} \right| \leq \dfrac{1}{x^{q-p}(1+\frac{1}{x^q})} \leq \dfrac{1}{x^{q-p}}$ ve $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{q-p}}$ integrali $p+1 < q$ için yakınsak olduğundan I_2 integrali aynı p ve q lar için mutlak yakınsaktır.

$g(x) = \dfrac{x^p}{1+x^q}$, $x \in [1, +\infty)$ olsun. $\forall x \in [1, +\infty)$ için

$g'(x) = x^{p+q-1} \dfrac{p(1+\frac{1}{x^q}) - q}{(1+x^q)^2}$ olduğundan, $p < q$ için yeteri kadar büyük

x ler için $g'(x) < 0$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{q-p}(1+\dfrac{1}{x^q})} = 0$ dır. Ayrıca, $F(b) = \int\limits_1^b \sin x dx = \cos 1 - \cos b$ fonksiyonu $[1,+\infty)$ üzerinde sınırlı olduğundan, Dirichlet Testine göre I_2 integrali $p < q$ için yakınsaktır.

Böylece, verilen integral $p > -2$, $p+1 < q$ için mutlak, $p > -2$, $p < q \leq p+1$ için koşullu yakınsaktır. $\diamond$

(10) Aşağıdaki has olmayan integralleri hesaplayınız.

(a) $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx,\ (n \in \mathbb{N});$

(b) $J_n = \int\limits_0^{1} (\ln x)^n dx,\ (n \in \mathbb{N});$

(c) $K_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n x dx,\ (n \in \mathbb{N},\ a > 0);$

(d) $L_n = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(a^2+x^2)^n},\ (n \in \mathbb{N});$

(e) $M_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)^n},\ (ac - b^2 > 0,\ n \in \mathbb{N})$.

Çözüm: Kısmi integrasyon yöntemi bir kaç kez uygulanarak verilen integrallerin hesaplanması indirgeme formüllerine dönüştürülür.

(a) $u = x^n$, $dv = e^{-x}dx$ denirse, $du = nx^{n-1}dx$, $v = -e^{-x}$ olacağından

$$I_n = -e^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = nI_{n-1}$$

olduğu elde edilir. $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ olduğundan, $I_2 = 2I_1 = 2!,\ I_3 = 3I_2 = 3!, \cdots, I_n = n!$ olur.

(b) $\forall\varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\varepsilon}\ln x = 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\varepsilon n}(\ln x)^n = 0$ olduğu açıktır. Buradan, $\varepsilon = \dfrac{1}{2n}$ için

$\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^n = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1)$ öyle ki $\forall x \in (0,x_0)$ için $\mid x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^n \mid < 1$ veya $(\ln x)^n < x^{-\dfrac{1}{2}}$ olur. $\int\limits_0^1 x^{-\dfrac{1}{2}}dx$ yakınsak olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için J_n integralinin yakınsak olduğu anlaşılır. $x = e^{-t}$ denirse, $x = 0$ için $t = +\infty$, $x = 1$ için $t = 0$ ve $dx = -e^{-t}dt$ olacağından,

$$J_n = (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = (-1)^n I_n \ [(a) \text{ dan}] \ = (-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{n}!$$

olur.

(c) $u = \sin^n x$, $dv = e^{-ax}dx$ denirse, $du = n\sin^{n-1} x\cos x dx$, $v = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$ olacağından,

$$\begin{aligned} K_n &= -\frac{1}{a}e^{-ax}\sin^n x\Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{n-1} x\cos x dx \\ &= \frac{n}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{n-1} x\cos x dx \end{aligned}$$

olur. Kısmi integrasyon yöntemini tekrar uygularsak ($u = \sin^{n-1} x\cos x$, $dv = e^{-ax}dx$ denirse, $du = [(n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x - \sin^n x]dx$, $v = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$)

$$K_n = -\frac{-n}{a^2}e^{-ax}\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{+\infty} + \frac{n(n-1)}{a^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{n-2} x\cos^2 x dx$$

$$\begin{aligned} &- \frac{n}{a^2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^n x dx [\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \ \ \text{olduğundan}] \\ &= \frac{n(n-1)}{a^2}K_{n-2} - \frac{n^2}{a^2}K_n \Rightarrow K_n = \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}K_{n-2} \end{aligned}$$

elde ederiz. $K_0 = \dfrac{1}{a}$ ve $K_1 = \dfrac{1}{1+a^2}$ olduğundan,

$$K_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2)\cdots((2k-1)^2+a^2)},$$

$$K_{2k} = \frac{(2k)!}{(a)(2^2+a^2)(4^2+a^2)\cdots((2k)^2+a^2)},$$

Benzer şekilde,

$$L_n = \frac{\pi}{2a^{2n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad M_n = \frac{\pi(2n-3)!!a^{n-1}\text{sgn}a}{(2n-2)!!(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

olduğu gösterilebilir. $\diamond$

(11) $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ Euler-Poisson İntegralini hesaplayınız.

Çözüm: Her $p \in (1,2]$ için $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{px^{p-1}}{2xe^{x^2}} = \dfrac{p}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{p-2}}{e^{x^2}} = 0$ olduğundan I integrali yakınsaktır. Bu integralin değerini hesaplayalım.

Her $x \in (0,+\infty)$ için $1 - x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

$\forall x \in (0,1)$ için $1-x^2 < e^{-x^2} \Rightarrow (1-x^2)^n < e^{-nx^2} \Rightarrow \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx < \int\limits_0^1 e^{-nx^2}dx$, $\forall x \in (0,+\infty)$ için $e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow e^{-nx^2} < \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx < \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^n}dx$ olur.

Demek ki, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

olduğu elde edilir. Problem (10) (d) ye göre

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

ve

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx\ [x=\cos t]\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx\ [t=\sqrt{n}x]\ = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{n}}I$$

olduğundan

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \sqrt{n}\frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$$

veya

$$\frac{n}{2n+1}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)} < I^2 < (\frac{\pi}{2})^2\frac{n}{2n-1}\frac{[(2n-3)!!]^2(2n-1)}{[(2n-2)!!]^2}$$

olur.

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n+1)!!]^2(2n+1)}$$

Vallis formülüne göre son eşitsizliğin her iki tarafı $n \to +\infty$ iken aynı $\dfrac{\pi}{4}$ limitine yaklaştığından

$$I^2 = \frac{\pi}{4}\ [I>0 \text{ olduğundan}] \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğu elde edilir. $\diamond$

(12) a ve b pozitif reel sayılar, f, $[0,+\infty)$ üzerinde sürekli ve $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ limiti var ve sonlu olsun. Bu durumda, $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ integralinin yakınsak olduğunu ve

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a} \tag{7.25}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f \in \mathcal{C}[0,+\infty)$ olduğundan $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < +\infty$ için

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx &= \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{f(ax)}{x}dx - \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{f(bx)}{x}dx \\
&= \int_{a\Delta_1}^{a\Delta_2} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{b\Delta_1}^{b\Delta_2} \frac{f(t)}{t}dt \\
&= \int_{a\Delta_1}^{b\Delta_1} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{a\Delta_2}^{b\Delta_2} \frac{f(t)}{t}dt
\end{aligned}$$

integrali mevcuttur.

Orta değer teoremi gerğince $\xi \in [a\Delta_1, b\Delta_1]$ olmak üzere

$$\int_{a\Delta_1}^{b\Delta_1} \frac{f(t)}{t}dt = f(\xi)\int_{a\Delta_1}^{b\Delta_1} \frac{dt}{t} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

ve benzer olarak, $\eta \in [a\Delta_2, b\Delta_2]$ olmak üzere

$$\int_{a\Delta_2}^{b\Delta_2} \frac{f(t)}{t}dt = f(\eta)\int_{a\Delta_2}^{b\Delta_2} \frac{dt}{t} = f(\eta)\ln\frac{b}{a}$$

yazabiliriz. Demek ki, her $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < +\infty$ için $\xi \in [a\Delta_1, b\Delta_1]$ ve $\eta \in [a\Delta_2, b\Delta_2]$ olmak üzere

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(\xi)\ln\frac{b}{a} - f(\eta)\ln\frac{b}{a} \tag{7.26}$$

olur. Tanım gereğince verilen integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \lim_{\substack{\Delta_1\to 0^+ \\ \Delta_2\to+\infty}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

şeklinde tanımlandığından dolayı (7.26) dan ($\Delta_1 \to 0^+$ iken $\xi \to 0^+$ ve $\Delta_2 \to +\infty$ iken $\eta \to +\infty$olduğunu dikkate alırsak) (7.25) eşitliğinin doğru olduğu anlaşılır. $\diamond$

Not: Sonlu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ limiti mevcut olmadığında, fakat her hangi $A > 0$ için $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ yakınsak ise

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \tag{7.27}$$

eşitliği doğrudur. $\bullet$

Not: Eğer f, $x = 0$ noktasında süreksiz, fakat her $A \in (0, +\infty)$ için $\int\limits_0^{A} \frac{f(t)}{t}dt$ integrali yakınsak olduğunda

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = f(+\infty)\ln\frac{a}{b} \tag{7.28}$$

eşitliği doğrudur. $\bullet$

Not: Kaynaklarda (7.25) integraline Frullani integrali denir. $\bullet$

(13) $a > 0$ ve $b > 0$ için aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx;$ (b) $\int\limits_0^{+\infty} \ln\frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}}\frac{dx}{x}$, $(p, q > 0);$

(c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}dx$; (d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx$;

(e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}dx$; (f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x}dx$;

(g) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\ln x}dx$.

Çözüm: